

CONCOURS BLANC 2024-2025

Épreuve de Mathématiques B

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENTS

L'épreuve est constituée d'un problème d'algèbre (partie I et partie II) et d'un exercice de probabilités indépendant (partie III).

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les candidats devront utiliser exclusivement un stylo à bille à encre foncée (bleue ou noire) pour la rédaction de leurs compositions. D'autres couleurs peuvent être utilisées dans les schémas. L'usage de stylos à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction, et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Pour cette épreuve de concours blanc, chaque candidat rédigera trois copies indépendantes qu'il intitulera respectivement :

- Mathématiques B-I (Partie I)
- Mathématiques B-II (Partie II)
- Mathématiques B-III (Partie III)

en indiquant très clairement sur chacune d'elles son numéro d'anonymat comme seule information d'identification. Il rendra obligatoirement trois copies, même si certaines devaient être blanches.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème d'algèbre

Notations et rappels

- Pour n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.
 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et I_n la matrice identité d'ordre n .
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne de M .
Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- Polynômes matriciels
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k , $M^{k+1} = MM^k$.
 $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
Si $L = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $L(M)$ la matrice $\sum_{k=0}^d a_k M^k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition et objectifs du problème

On définit le commutant C_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des matrices commutant avec A , c'est à dire

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

L'objectif du problème est d'étudier le commutant de certaines matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cette partie est à rédiger impérativement sur une première copie portant votre numéro d'anonymat et intitulée :

Mathématiques B-I

Si vous n'abordez pas cette partie, il vous est demandé de rendre une copie blanche.

Partie I

Partie I-A : des propriétés générales

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, si M et N appartiennent à C_A , alors leur produit MN appartient à C_A .
3. Montrer que si M appartient à C_A , alors, pour tout entier naturel k , M^k appartient à C_A .
4. Dédurre de la question précédente que, si $L \in \mathbb{R}[X]$, alors $L(A) \in C_A$.
On note $A' = P^{-1}AP$.
5. Montrer que M appartient à C_A si et seulement si $M' = P^{-1}MP$ appartient à $C_{A'}$.
On définit les deux applications Φ et Ψ par

$$\Phi : \begin{cases} C_A & \rightarrow & C_{A'} \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{cases} C_{A'} & \rightarrow & C_A \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{cases}$$

6. Justifier que Φ est une application linéaire.
*On veillera à bien démontrer que, pour tout $M \in C_A$, on a $\Phi(M) \in C_{A'}$.
On admet de même que Ψ est aussi une application linéaire.*
7. Calculer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.
8. Établir que Φ et Ψ sont des isomorphismes.

Partie I-B : deux exemples en dimension 3

I-B-1) : un premier exemple

Dans cette sous partie I-B-1, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et expliciter une matrice P_1 inversible et une matrice D_1 diagonale telles que $A = P_1 D_1 P_1^{-1}$.

Les valeurs propres seront rangées dans l'ordre croissant.

2. Montrer qu'une matrice $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à C_{D_1} si et seulement s'il existe cinq réels p, q, r, s et t tels que

$$N = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

3. En déduire une base de C_{D_1} .
4. En utilisant la question 8 de la partie I-A, déterminer la dimension de C_A et préciser comment on pourrait en obtenir une base.

I-B-2) : un deuxième exemple

Dans cette sous-partie I-B-2, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de B , ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
2. B est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Justifier les réponses.
On note b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant B comme matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $b(u) = -2u$ et $b(v) = v$ et dont les premières composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont égales à 1.
4. Déterminer le vecteur w de première composante nulle dans la base $\mathcal{B}$ vérifiant $b(w) = v + w$.
5. Vérifier que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner une matrice P_2 inversible telle que $B = P_2 T P_2^{-1}$, où

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Montrer qu'une matrice $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à C_T si et seulement s'il existe trois réels α, β et γ tels que

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

7. En déduire une base de C_T , puis la dimension de C_B .

Cette partie est à rédiger impérativement sur une deuxième copie portant votre numéro d'anonymat et intitulée :

Mathématiques B-II

Si vous n'abordez pas cette partie, il vous est demandé de rendre une copie blanche.

Partie II

Partie II-A : Commutant d'une matrice d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes

On suppose dans cette partie II-A que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et que A est une matrice réelle d'ordre n admettant n valeurs propres réelles deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

II-A-1) : dimension de C_A

- Justifier qu'il existe une matrice P_3 inversible telle que $A = P_3 D P_3^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
- Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que les coefficients sont notés $[N]_{i,j}$
 - Pour deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappeler l'expression de $[BC]_{i,j}$ coefficients en ligne i et colonne j de la matrice produit BC , en fonction des coefficients des matrices B et C .
 - Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $[ND]_{i,j}$ et $[DN]_{i,j}$.
 - Démontrer que N appartient à C_D si et seulement s'il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que

$$N = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

- Déterminer une base de C_D , puis la dimension de C_A .

II-A-2) : une base de C_A

On rappelle que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres distinctes de la matrice A .

- On considère l'application w de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie pour tout polynôme L de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, par

$$w(L) = (L(\lambda_1), L(\lambda_2), \dots, L(\lambda_n))$$

- Montrer que w est une application linéaire.
- Montrer que w est injective.
- Montrer que, pour tout $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad Q(\lambda_i) = \mu_i.$$

- Soit M une matrice appartenant à C_A . On pose $N = P_3^{-1} M P_3$.
 - Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $N = Q(D)$.
 - Montrer que $M = Q(A)$, en déduire que $C_A \subset \text{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$.
 - En déduire, en fonction de la matrice A , une base de C_A .

Partie II-B

Partie II-B-1 : un résultat général

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n (avec $n \geq 2$).

On considère un endomorphisme f de E , diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distinctes.

On note $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$ les sous espaces propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

- Justifier que l'on a $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$.

- Soit g un endomorphisme de E .

- On suppose que g commute avec f , c'est à dire que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que, pour tout i avec $1 \leq i \leq p$, le sous espace $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g .

- On suppose que, pour tout i , $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g .

Montrer que g commute avec f .

Pour $x \in E$, on pourra justifier qu'il existe $(x_1, \dots, x_p)$ dans $E_{\lambda_1}(f) \times \dots \times E_{\lambda_p}(f)$ tels que $x = x_1 + \dots + x_p$

Partie II-B-2 : commutant d'une matrice d'ordre n diagonalisable

On suppose dans cette partie que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note M une matrice réelle d'ordre n diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_p$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M .

1. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u dans cette base soit $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_p I_{n_p})$.

(Le bloc $\lambda_i I_{n_i}$ désignant la matrice $\text{diag}(\lambda_i, \dots, \lambda_i)$ de $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$).

2. Dédurre de la partie II-B-1 qu'un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ commute avec u si et seulement si sa matrice dans la base

$$\mathcal{B} \text{ est de la forme "blocs" suivante : } \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_p \end{pmatrix}$$

(où les M_k sont des matrices carrées de tailles respectives n_k et les "zéros" désignent des matrices remplies de 0 de tailles convenables)

3. En déduire que N appartient à C_D si et seulement si il existe des matrices $M_1, \dots, M_p$ de tailles respectives $n_1, \dots, n_p$ telles que $N = \text{diag}(M_1, \dots, M_p)$ (matrice diagonale par blocs)
4. En déduire la dimension de C_D , puis celle de C_M .
5. Vérifier la cohérence de ce résultat avec la sous-partie I-B-1.

Cette partie est à rédiger impérativement sur une troisième copie portant votre numéro d'anonymat et intitulée :

Mathématiques B-III

Si vous n'abordez pas cette partie, il vous est demandé de rendre une copie blanche.

Partie III : exercice de probabilités

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

- Les jours sont numérotés à partir de $n = 1$.
 - Le comportement de l'appareil au jour $n + 1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.
 - Si l'appareil fonctionne le jour n , il a une probabilité α d'être en panne le jour $n + 1$.
 - Si l'appareil est en panne au jour n , il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n + 1$.
 - On a $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$.
- Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne au jour n , on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \alpha, \text{ et } \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = \beta \text{ et } \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1 - \beta.$$

1. On note $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

(a) Calculer p_2 en fonction de p_1 .

(b) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.$$

(c) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 .

(d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

2. On suppose dans cette question que $p_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

(a) Calculer la loi de X_2 .

(b) Calculer la loi du couple (X_1, X_2) .

(c) Calculer l'espérance et la variance de X_1 et de X_2 .

(d) Calculer la covariance entre X_1 et X_2 .

(e) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. On suppose maintenant que l'appareil est en fonctionnement le premier jour.

On note N le numéro du jour où cet appareil tombe en panne pour la première fois si cela existe et, lorsque l'appareil ne tombe jamais en panne, on pose $N = +\infty$.

(a) Préciser les valeurs prises par N .

(b) Pour $n \geq 2$, exprimer l'événement $\{N = n\}$ à l'aide des variables $X_1, \dots, X_n$.

En déduire la probabilité $\mathbb{P}(N = n)$.

(c) Montrer que l'événement $\{N = +\infty\}$ est négligeable. On considère dans la suite que N est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

(d) Montrer que $N - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

4. On considère Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p .

(a) Calculer la fonction génératrice de Y_1 .

(b) En déduire la fonction génératrice de $Y_1 + Y_2$.

(c) On pose $Z = \min(Y_1, Y_2)$.

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y_1 \geq n)$.

ii. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}(Z \geq n)$.

iii. En déduire la loi de Z et l'identifier.

(d) On pose $T = \max(Y_1, Y_2)$. Calculer la loi de T .

on pourra d'abord calculer $\mathbb{P}(T \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

5. L'usine est équipée de deux appareils dont on suppose les comportements indépendants l'un de l'autre. On suppose que les deux appareils sont en fonctionnement le premier jour. Au bout de combien de jours en moyenne se produira la première panne ?